

or-7. 正規分布

(オペレーションズリサーチ)

URL: <https://www.kkaneko.jp/cc/or/index.html>

金子邦彦



7-1 分布

- コイン投げを50回繰り返すと、表が何回で、裏が何回かのシミュレーション

だいたい 25

シミュレーションの繰り返しで確認

Excel の乱数



- =RAND()

0 以上 1 未満の乱数

- =IF(RAND() < 0.5, 1, 0)

乱数が **0.5 より小さければ 1,**
さもなければ **0**

コイン投げのシミュレーション



- コインを 50 枚投げる
- 表が出る確率 0.5, 裏が出る確率 0.5
- それを繰り返す

- 次のように操作して、新しく空白のブックを作る

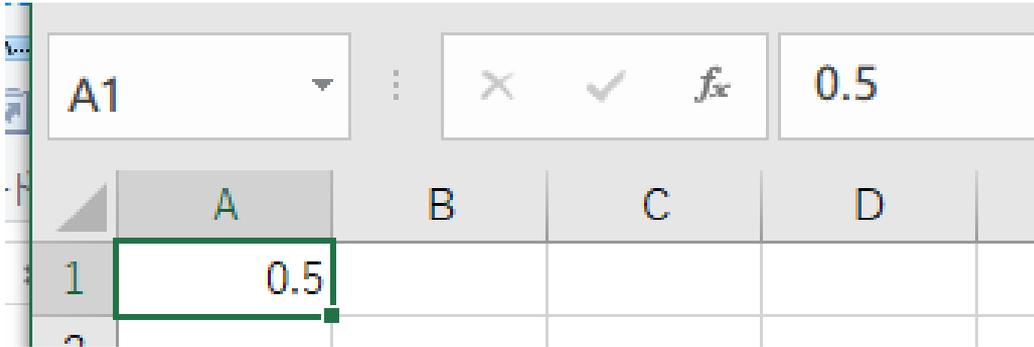


「ファイル」を
クリック

「新規」
をクリック

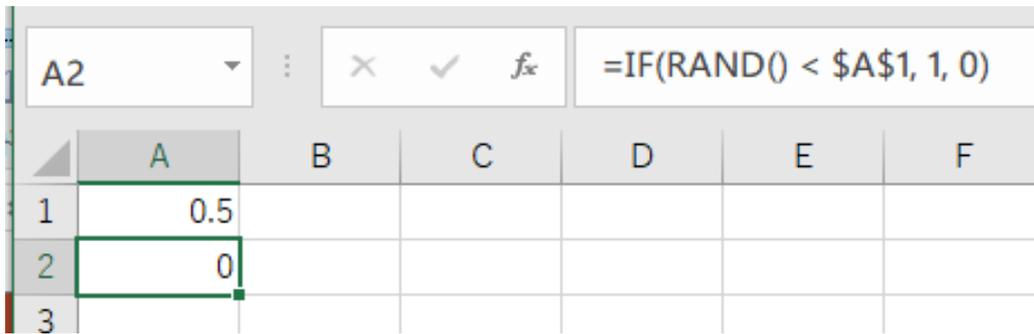
空白のブック

① セル A1 に「0.5」



	A	B	C	D
1	0.5			

② セル A2 に次の式

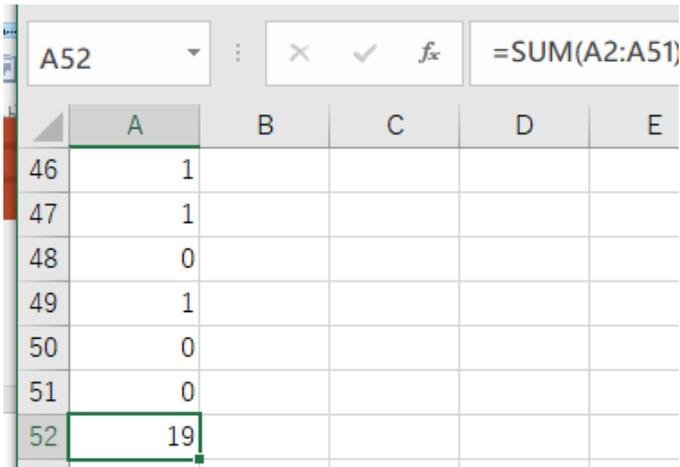


	A	B	C	D	E	F
1	0.5					
2	0					
3						

③ セル A2 の式を, A3 から A51 に「コピー & 貼り付け」する

右クリックメニューが便利

④ セル A52 に次の式
=SUM(A2:A51)



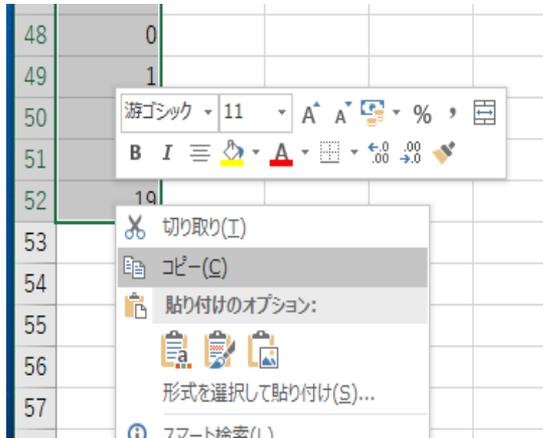
The screenshot shows an Excel spreadsheet with columns A through E and rows 46 through 52. The formula bar at the top shows the formula =SUM(A2:A51) entered in cell A52. The spreadsheet data is as follows:

	A	B	C	D	E
46	1				
47	1				
48	0				
49	1				
50	0				
51	0				
52	19				

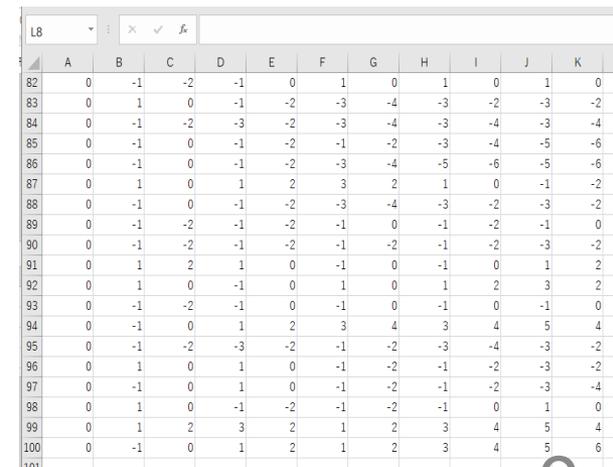
50 枚のうち,
表になるのは何枚になりそうか

※ **乱数**なので, 実行のたびに違った値になる

⑤ A2 から A52 を範囲選択して，右クリックメニューで「コピー」



⑥ それを，B2から E52に張り付け



The screenshot shows an Excel spreadsheet with columns A through K and rows 82 through 100 visible. The data from the previous step is pasted into the range B2:E52. The data is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
82	0	-1	-2	-1	0	1	0	1	0	1	0
83	0	1	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-3	-2
84	0	-1	-2	-3	-2	-3	-4	-3	-4	-3	-4
85	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-3	-4	-5	-6
86	0	-1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-5	-6
87	0	1	0	1	2	3	2	1	0	-1	-2
88	0	-1	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-3	-2
89	0	-1	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0
90	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-3	-2
91	0	1	2	1	0	-1	0	-1	0	1	2
92	0	1	0	-1	0	1	0	1	2	3	2
93	0	-1	-2	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0
94	0	-1	0	1	2	3	4	3	4	5	4
95	0	-1	-2	-3	-2	-1	-2	-3	-4	-3	-2
96	0	1	0	1	0	-1	-2	-1	-2	-3	-2
97	0	-1	0	1	0	-1	-2	-1	-2	-3	-4
98	0	1	0	-1	-2	-1	-2	-1	0	1	0
99	0	1	2	3	2	1	2	3	4	5	4
100	0	-1	0	1	2	1	2	3	4	5	6

⑦ 52 行目を確認する

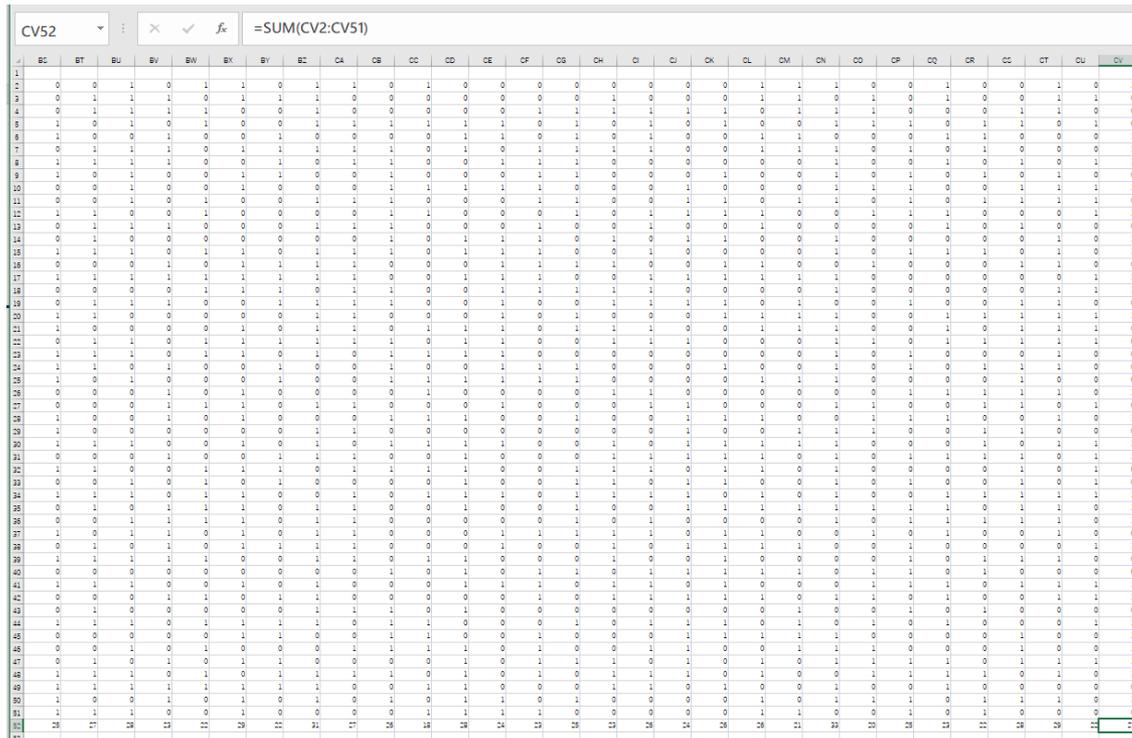
47	0	1	0	1	1
48	1	1	1	1	1
49	1	1	1	0	1
50	1	1	0	1	0
51	1	1	0	0	0
52	24	25	32	24	32
53					
54					

50 枚のうち、
表になるのは何枚になりそうか

⑧ 100 列に増やしてみなさい

A2 から A52 を範囲選択して，右クリックメニューで「コピー」

それを **F列から CV列**まで貼り付け



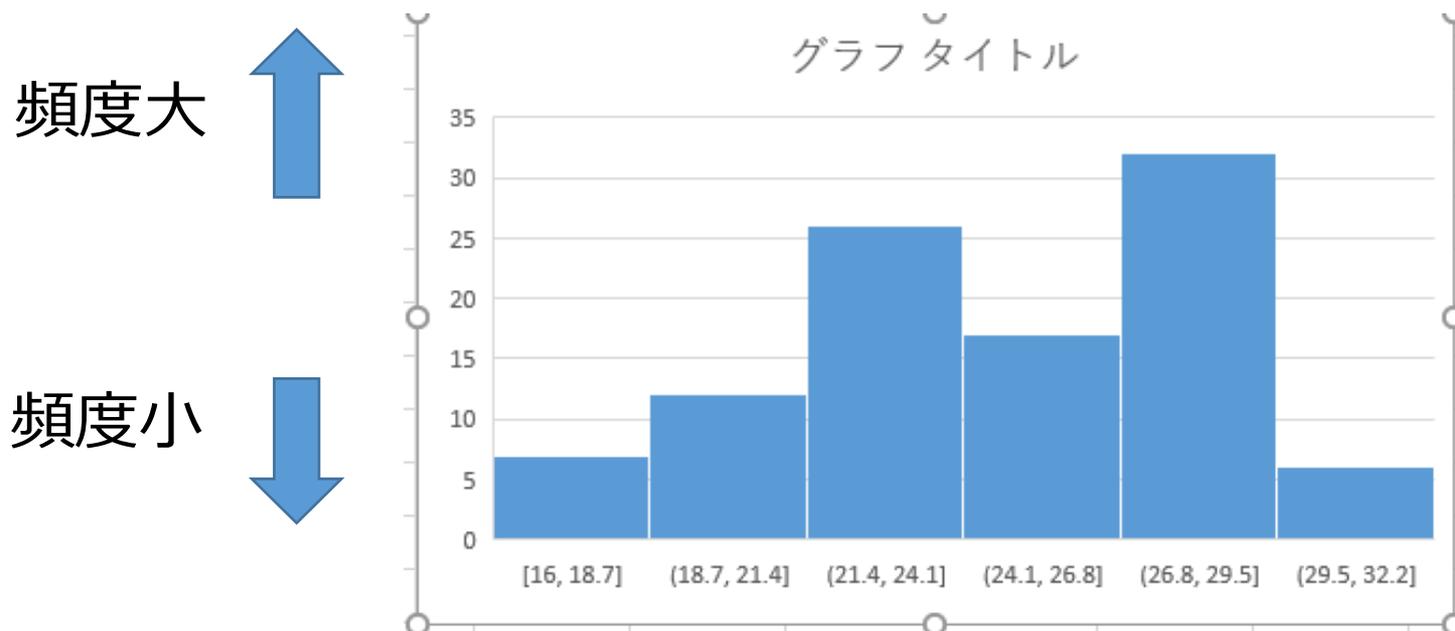
	BC	BT	BV	BW	BX	BY	BZ	CA	CB	CC	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP	CQ	CR	CS	CT	CU	CV
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
2	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
7	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
8	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
11	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
13	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
15	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
16	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
18	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
19	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
20	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
21	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
22	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
23	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
24	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
25	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
26	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
27	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
28	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
29	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
30	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
31	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
32	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
33	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
34	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
35	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
36	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
37	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
38	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
39	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
41	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
42	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
43	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
44	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
45	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
46	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
47	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
48	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
49	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
50	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
51	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
52	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54

ヒストグラム

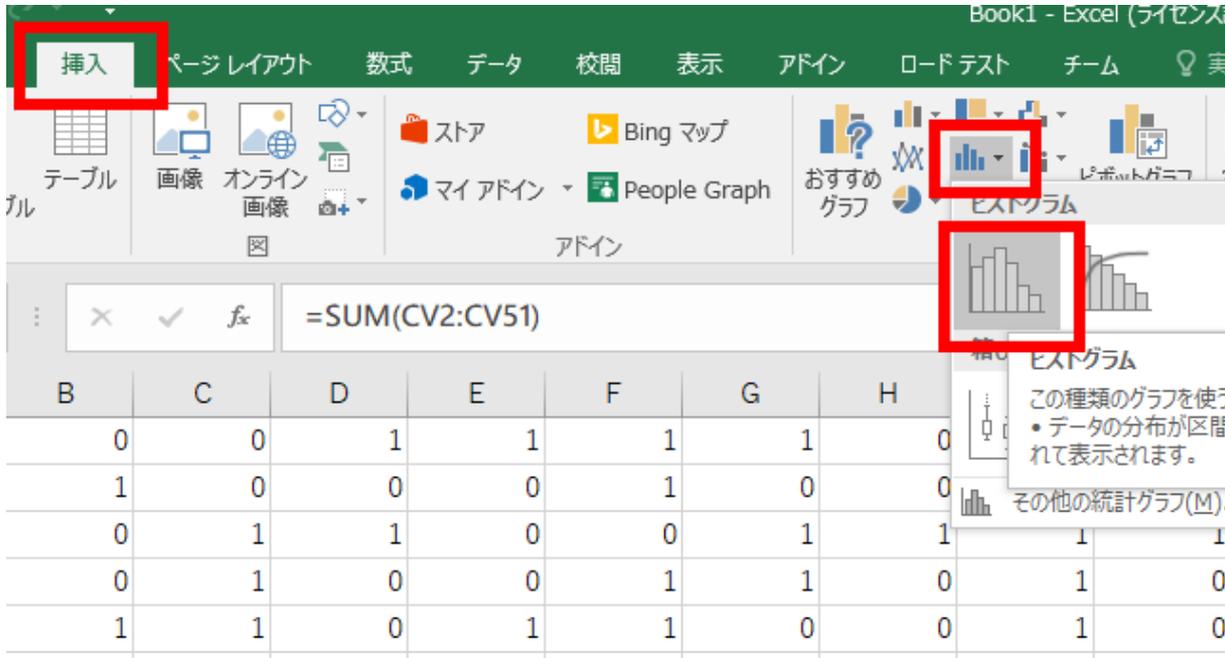


- 頻度分布（何が多くて、何が少ないか）を示したグラフ

50 枚コインを投げる．表が出る確率は **0.5**
表が出る枚数の**ヒストグラム**は



A52 から CV52 を範囲選択して、**挿入**を選び、 **ヒストグラム**を選ぶ ヒストグラムは：**頻度分布**



Book1 - Excel (ライセンス)

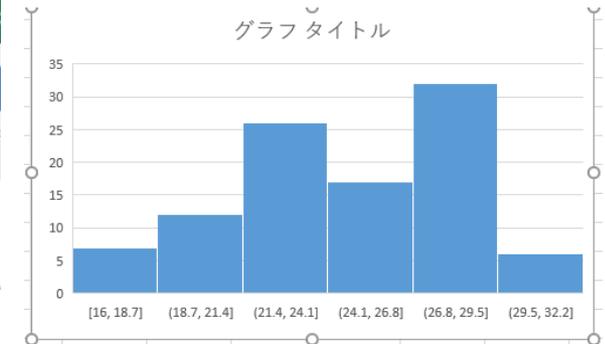
挿入 ページレイアウト 数式 データ 校閲 表示 アドイン ロードテスト チーム 実

テーブル 画像 オンライン画像 ストア Bing マップ おすすめグラフ ヒストグラム レポート生成

マイアドイン People Graph アドイン

fx =SUM(CV2:CV51)

B	C	D	E	F	G	H
0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0



50 枚コインを投げる。表が出る確率は **0.5**

表が出る枚数の**平均**と**標準偏差**は

■ Excel (シミュレーション) では

53	24.83
54	3.57786
55	

=AVERAGE(A52:CV52)

=STDEVP(A52:CV52)

■ 数式では

平均 25 = **50 × 0.5**

標準偏差 3.535534 = **50 × 0.5 × (1 - 0.5)** の平方根

表が出た枚数の、**平均**と**標準偏差**を求めてみよう
標準偏差は「ばらつき」の量

平均 AVERAGE

標準偏差 STDEVP

53	24.83
54	3.57786

セル **A53** に次の式

=AVERAGE(A52:CV52)

セル **A54** に次の式

=STDEVP(A52:CV52)

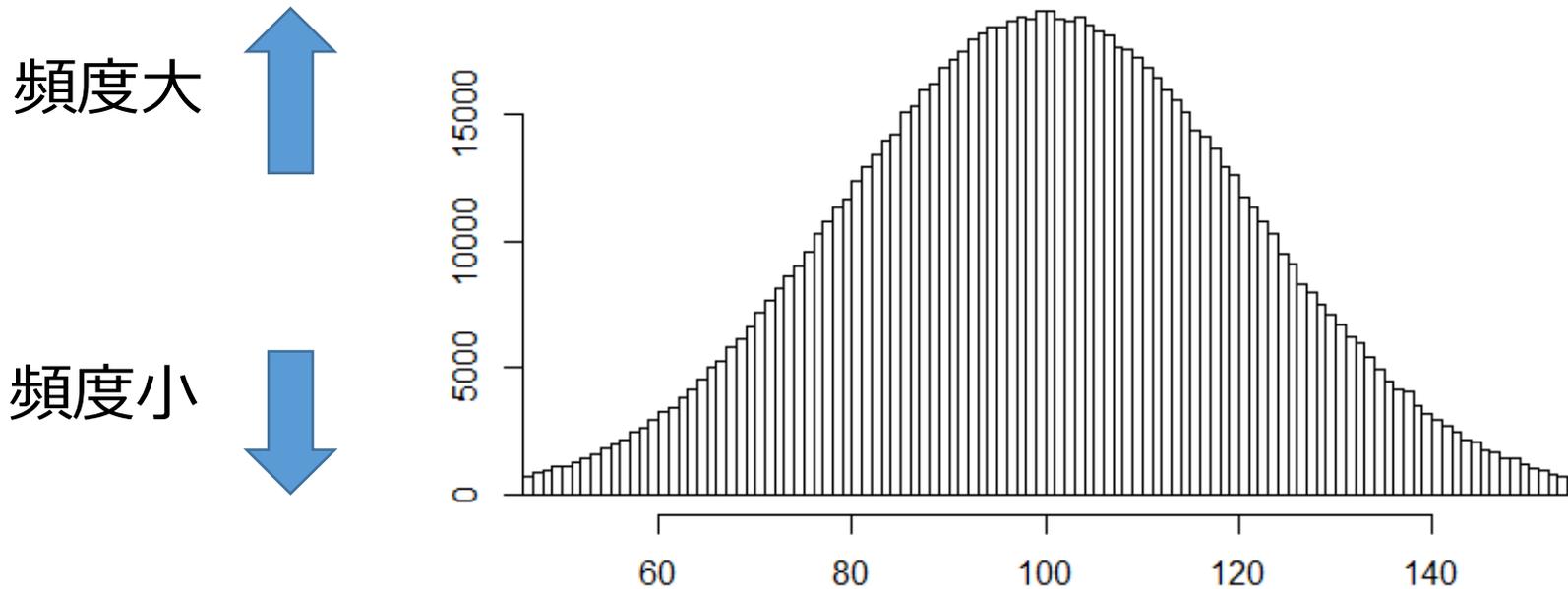
7-2 正規分布

- 正規分布を知る
- 平均と標準偏差から正規分布を作る（Excel を使用）

正規分布とは

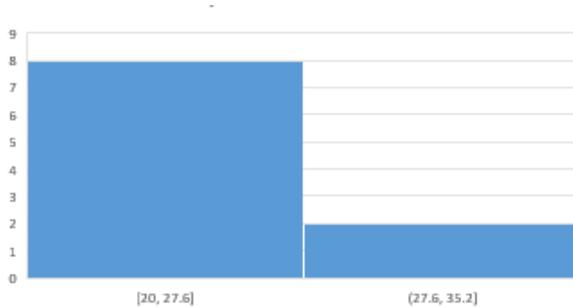


正規分布は、平均と標準偏差だけで頻度分布を考
えること

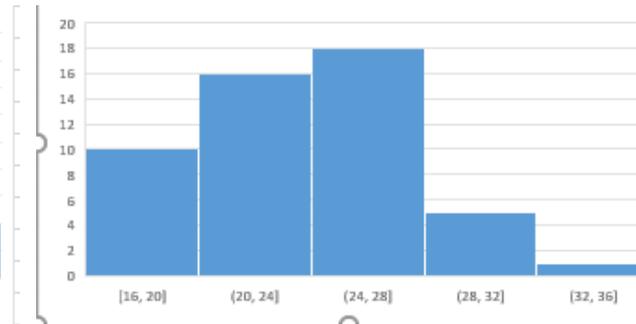


コイン投げと正規分布

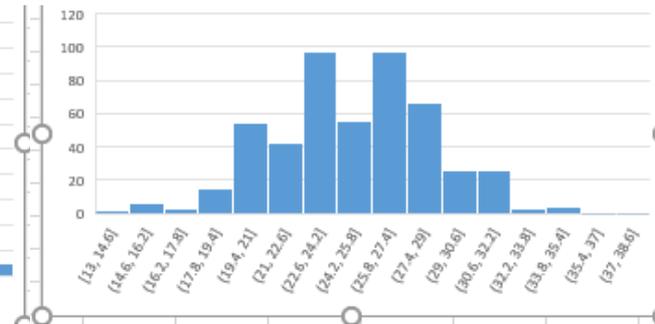
- コイン投げのシミュレーションで，頻度分布を作った。
- コイン投げの回数を増やすと，頻度分布の形は，正規分布に近づく



10 回



50 回



500 回

いまから行うこと

パラメータ

平均	300
標準偏差	20

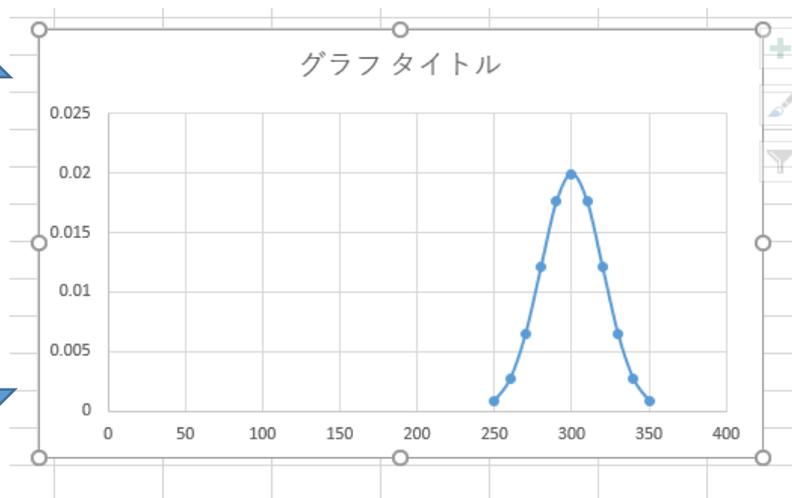


Excel の **NORM.DIST** を使い、**正規分布** をプロット

頻度大



頻度小



次のように操作して、新しく空白のブックを作る



「ファイル」を
クリック

「新規」
をクリック

空白のブック

次のように値を書く

	A	B
1	平均	300
2	標準偏差	20
-		

※ 数値はすべて半角

- A列に，次のように値を書き加える。

これは，あとで，正規分布を作るときに使う

	A	B
1	平均	300
2	標準偏差	20
3		
4	250	
5	260	
6	270	
7	280	
8	290	
9	300	
10	310	
11	320	
12	330	
13	340	
14	350	
15		

※ 数値はすべて半角

次のように式を書く

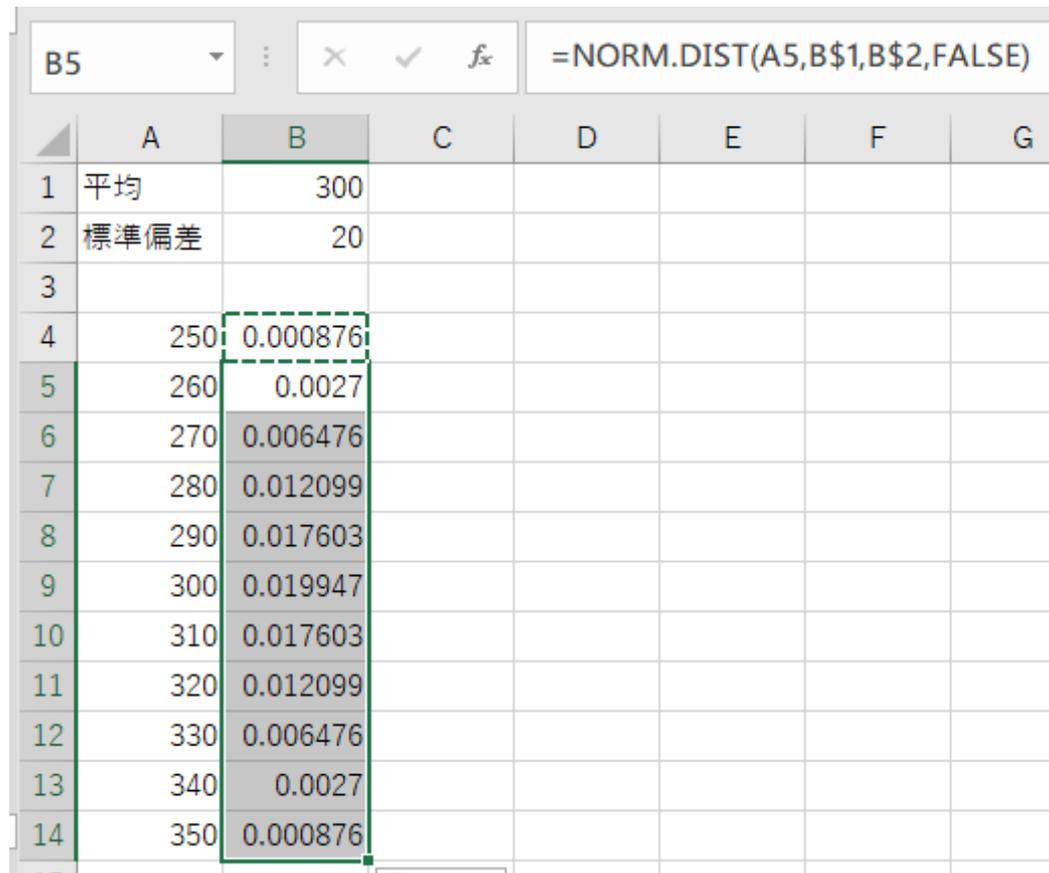
平均と標準偏差から正規分布

B4に式 「=NORM.DIST(A4,B\$1,B\$2,FALSE)」

	A	B	C	D	E	F	G
1	平均	300					
2	標準偏差	20					
3							
4	250	0.000876					
5	260						
6	270						
7	280						
8	290						
9	300						
10	310						
11	320						
12	330						
13	340						
14	350						
15							

B4 の式を, B5からB14に「コピー&貼り付け」する

右クリックメニューが便利

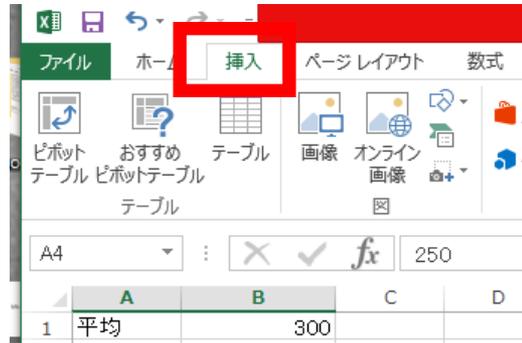


	A	B	C	D	E	F	G
1	平均	300					
2	標準偏差	20					
3							
4	250	0.000876					
5	260	0.0027					
6	270	0.006476					
7	280	0.012099					
8	290	0.017603					
9	300	0.019947					
10	310	0.017603					
11	320	0.012099					
12	330	0.006476					
13	340	0.0027					
14	350	0.000876					

次の手順でグラフを作成する

	A	B
1	平均	300
2	標準偏差	20
3		
4	250	0.000876415
5	260	0.002699548
6	270	0.00647588
7	280	0.012098536
8	290	0.017603266
9	300	0.019947114
10	310	0.017603266
11	320	0.012098536
12	330	0.00647588
13	340	0.002699548
14	350	0.000876415

**A4 から B14 を
範囲選択**



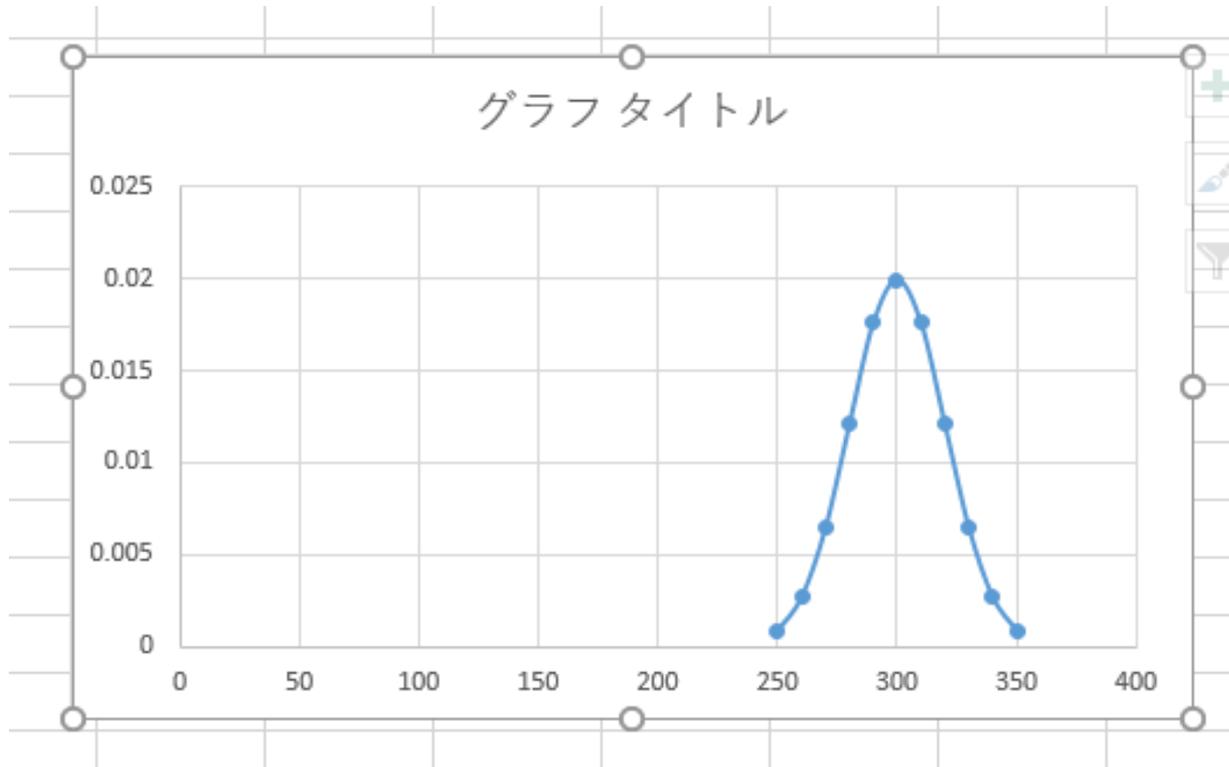
**「挿入」タブを
クリック**



**「散布図（平滑線
とマーカー）」を
選ぶ**

正規分布がプロットされるので確認

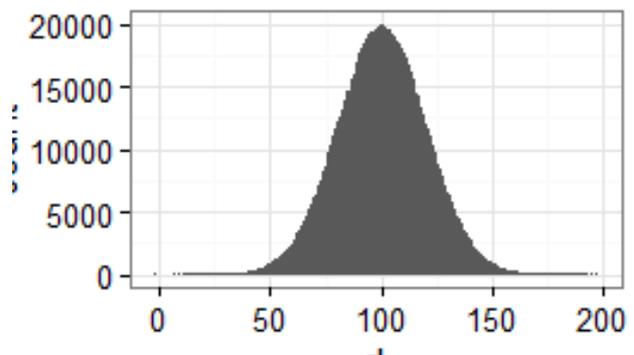
※ 値や式はあとで使うので，消さないこと



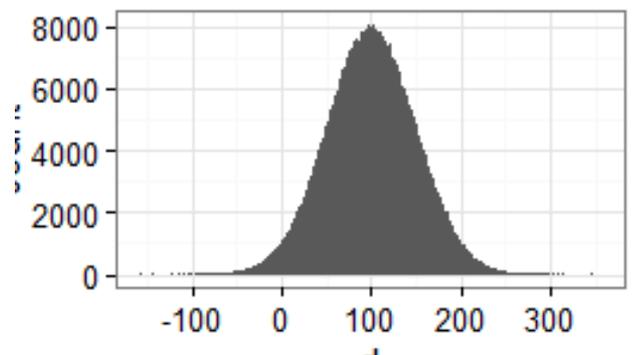
正規分布の性質



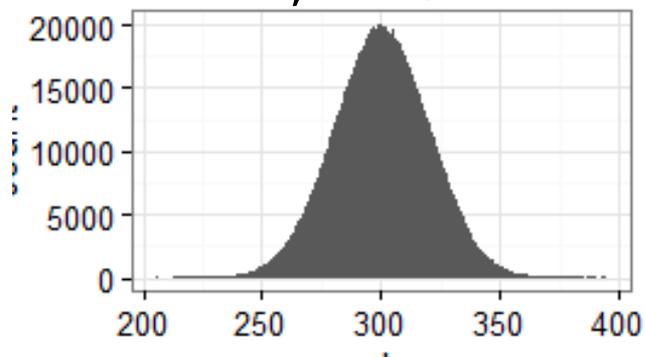
平均や標準偏差が変わっても、**正規分布**の形は同じ



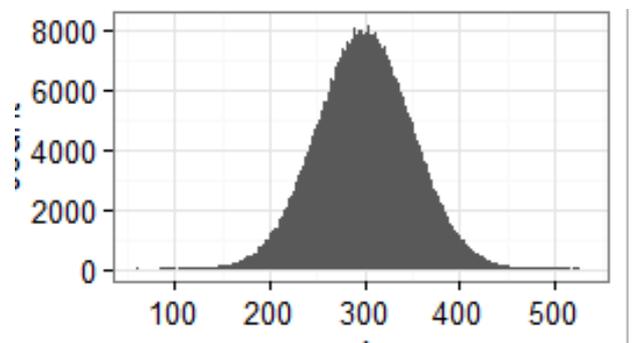
平均 100, 標準偏差 20



平均 100, 標準偏差 50



平均 300, 標準偏差 20



平均 300, 標準偏差 50

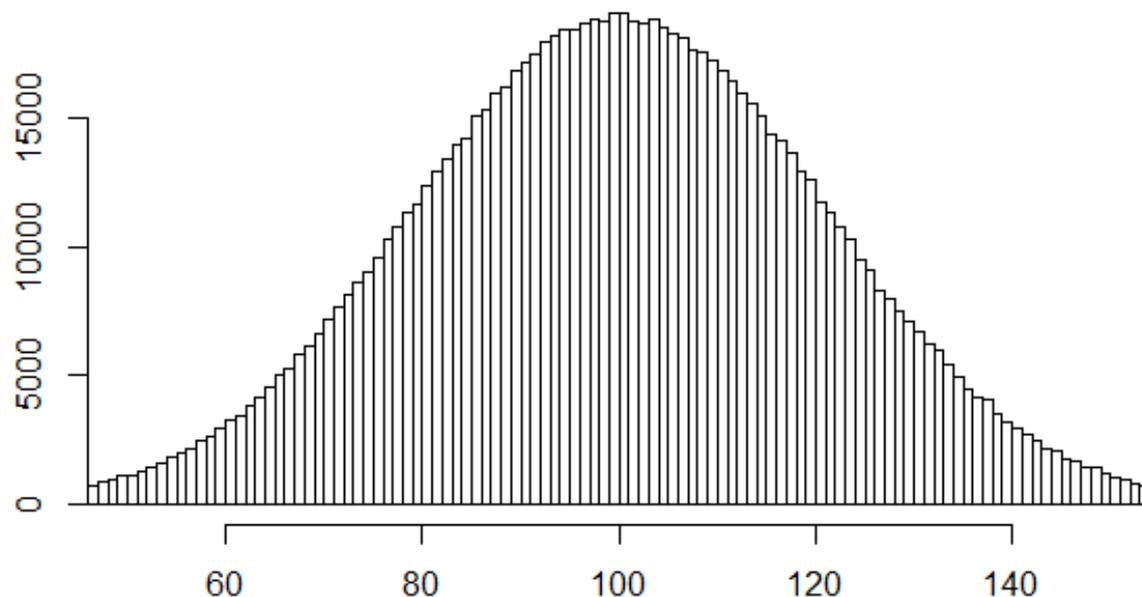
正規分布とは

- 正規分布とは、平均と標準偏差だけで頻度分布を考えること
(単純な分布)
- 正規分布では、平均値のところに頻度大の山ができる

頻度大



頻度小



7-3 正規分布の活用例

- 平均と標準偏差から正規分布を作る（Excel を使用）
- 今度は「50枚コインを投げたときの表の枚数」に合致するように、平均と標準偏差を設定

いまから行うこと



50 枚コインを投げる. 表が出る確率は **0.5**

【表が出る枚数の**平均**と**標準偏差**】

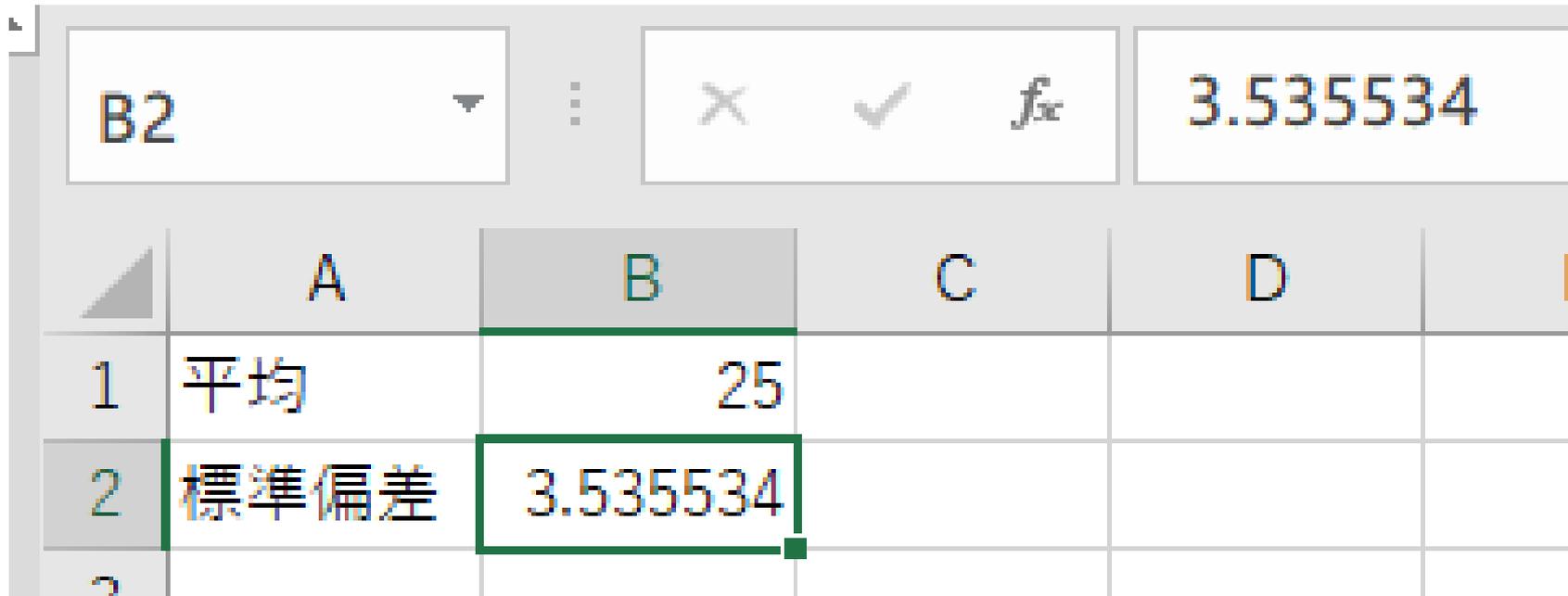
平均 25 = **50** × **0.5**

標準偏差 3.535534 = **50** × **0.5** × (1 - **0.5**) の平方根

■ 正規分布をプロット

- 「表が **30** 枚以上になる**確率**」は？
- 「表が **35** 枚以上になる**確率**」は？
- 「表が **40** 枚以上になる**確率**」は？

- B1, B2 を次のように書き替える



	A	B	C	D
1	平均	25		
2	標準偏差	3.535534		
3	?			

※ 数値はすべて半角

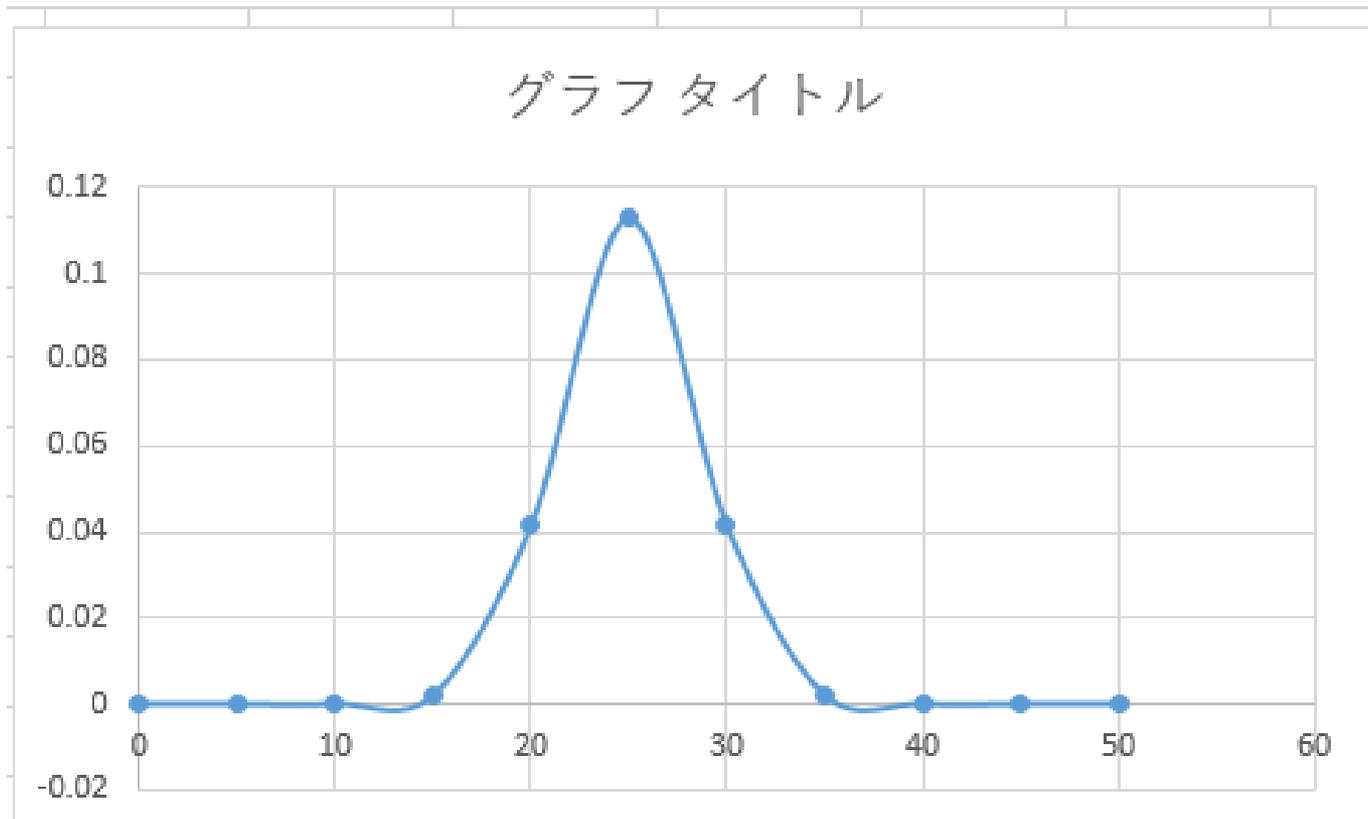
- A4 から A14を，次のように書き替える

	A	B
1	平均	25
2	標準偏差	3.535534
3		
4	0	1.57E-12
5	5	1.27E-08
6	10	1.39E-05
7	15	0.002067
8	20	0.041511
9	25	0.112838
10	30	0.041511
11	35	0.002067
12	40	1.39E-05
13	45	1.27E-08
14	50	1.57E-12
15		

※ 数値はすべて半角

- 先ほど作成したグラフが自動で書き換わるので、確認する

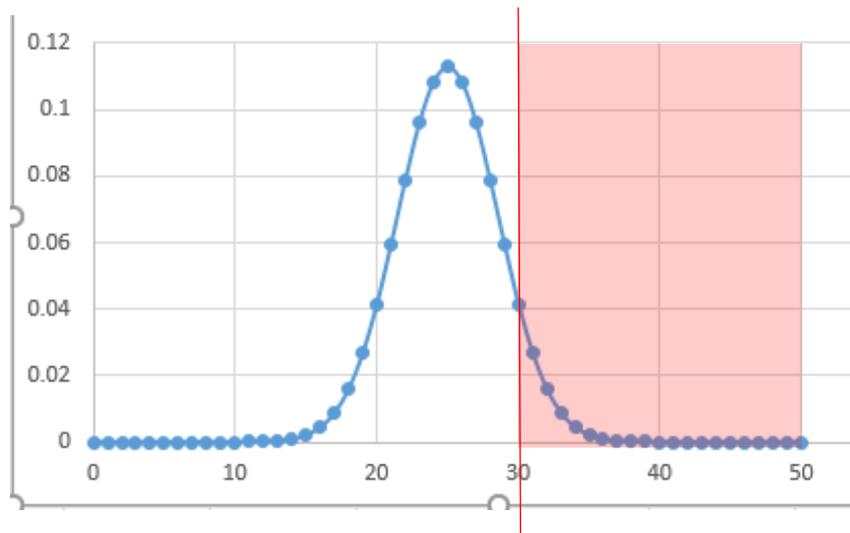
※ 値や式はあとで使うので、**消さないこと**



表が **30 枚以上** になるのは :

下の図の **赤のエリア**

全体を 1 として **0.07865** 8 パーセントくらい



30

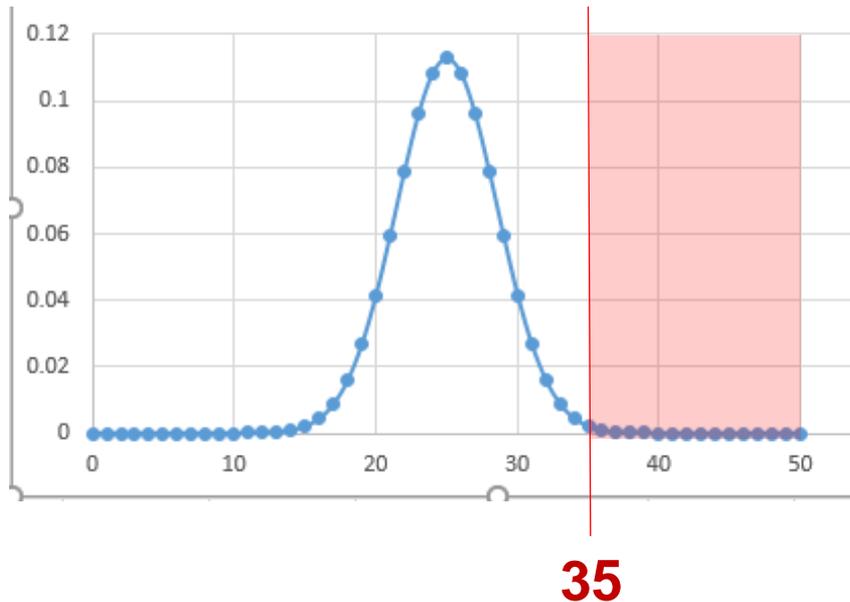
分布と確率 その②



表が **35 枚以上** になるのは :

下の図の **赤のエリア**

全体を 1 として **0.00234** 0.2 パーセント くらい



分布と確率 その③

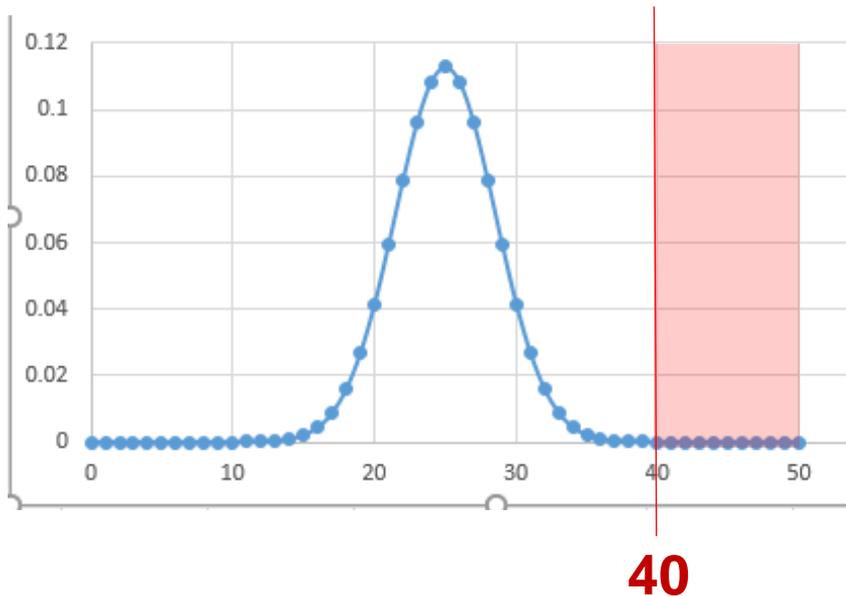


表が **40 枚以上** になるのは :

下の図の赤のエリア

全体を 1 として **0.000011**

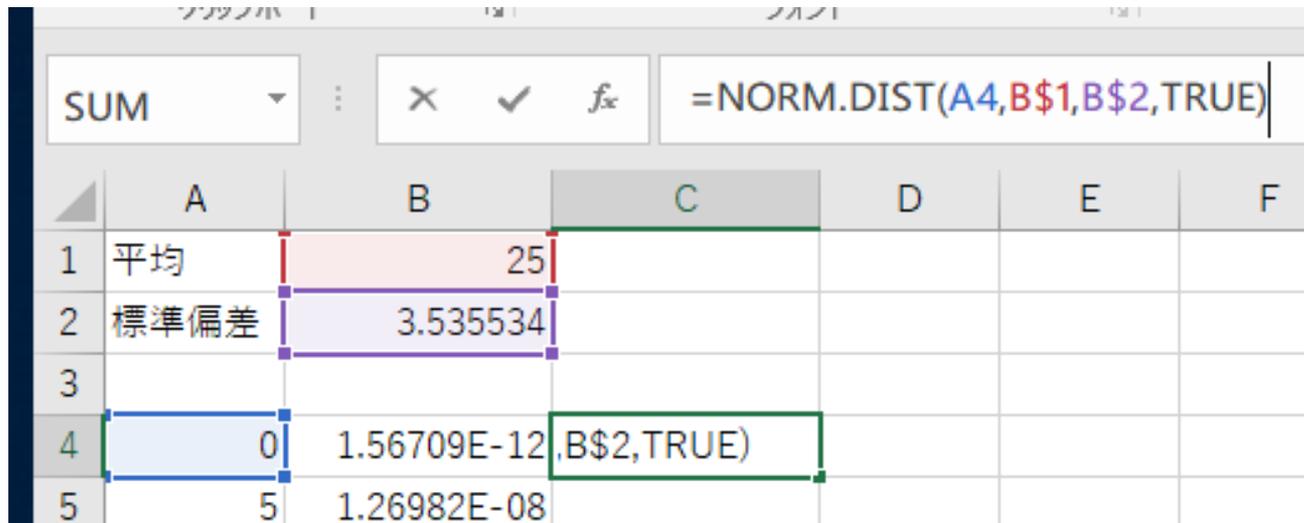
0.001 パーセントくらい



- C4 に式を書く

C4に式「**=NORM.DIST(A4,B\$1,B\$2,TRUE)**」

今度は「**TRUE**」. FALSEとの違いは今から確認

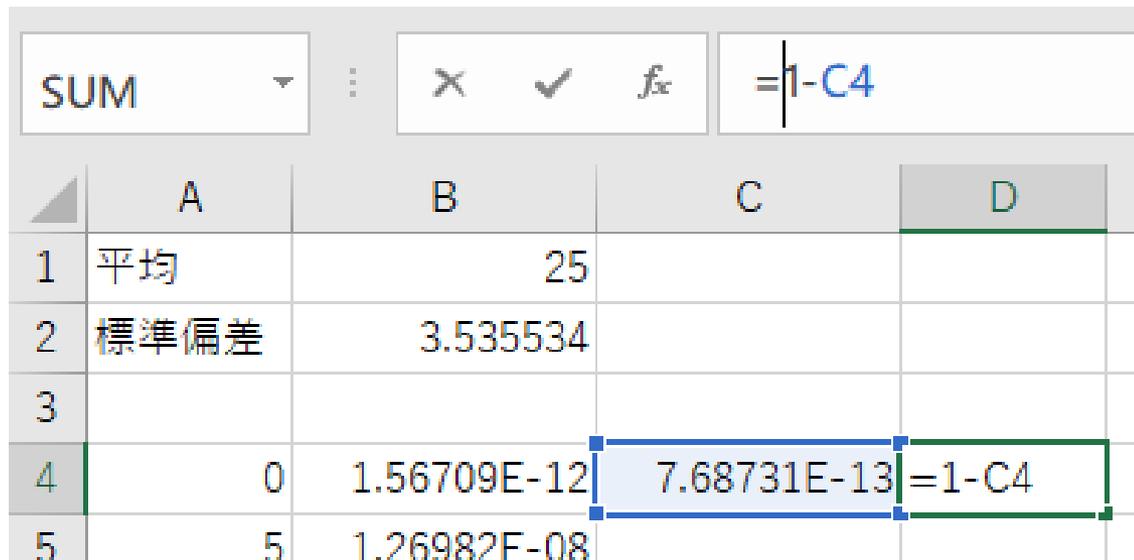


	A	B	C	D	E	F
1	平均	25				
2	標準偏差	3.535534				
3						
4	0	1.56709E-12	=NORM.DIST(A4,B\$1,B\$2,TRUE)			
5	5	1.26982E-08				

※ 数値はすべて半角

- C5 に式を書く

C5に式「=1-C4」



	A	B	C	D
1	平均	25		
2	標準偏差	3.535534		
3				
4	0	1.56709E-12	7.68731E-13	=1-C4
5	5	1.26982F-08		

※ 数値はすべて半角

C4 と D4 を範囲選択して，右クリックメニューで「コピー」

それを，**C5 から D14 に張り付け**

	A	B	C	D	
1	平均	25			
2	標準偏差	3.535534			
3					
4	0	1.56709E-12	7.68731E-13	1	
5	5	1.26982E-08	7.70864E-09	1	
6	10	1.39253E-05	1.10453E-05	0.99999	
7	15	0.002066699	0.002338868	0.99766	
8	20	0.041510751	0.078649609	0.92135	
9	25	0.112837914	0.5	0.5	
10	30	0.041510751	0.921350391	0.07865	
11	35	0.002066699	0.997661132	0.00234	
12	40	1.39253E-05	0.999988955	1.1E-05	
13	45	1.26982E-08	0.999999992	7.7E-09	
14	50	1.56709E-12	1	7.7E-13	
15					

	A	B	C	D
1	平均	25		
2	標準偏差	3.535534		
3				
4	0	1.56709E-12	7.68731E-13	1
5	5	1.26982E-08	7.70864E-09	1
6	10	1.39253E-05	1.10453E-05	0.99999
7	15	0.002066699	0.002338868	0.99766
8	20	0.041510751	0.078649609	0.92135
9	25	0.112837914	0.5	0.5
10	30	0.041510751	0.92135039	0.07865
11	35	0.002066699	0.99766113	0.00234
12	40	1.39253E-05	0.99998895	1.1E-05
13	45	1.26982E-08	0.999999992	7.7E-09
14	50	1.56709E-12	1	7.7E-13
15				

■ 表が **30** 枚以上になる**確率**
0.07865

■ 表が **35** 枚以上になる**確率**
0.00234

■ 表が **40** 枚以上になる**確率**
0.000011

(エクセルでは 1.1E-05 のように表示されることもある。
1.1E-05 と 0.000011 は同じ

※ 値や式はあとで使うので、消さないこと

7-4 正規分布の活用演習

- 「データ」から正規分布を推定
- データの平均と標準偏差にあうような正規分布を、Excelで作る

平均と標準偏差の例



<売り上げデータの例>

5月 7日 80個
5月 8日 110個
5月 9日 120個
5月 10日 70個
5月 11日 120個



平均 100
標準偏差 20.97618

平均、標準偏差は
計算で求まる

- A16 から A20 に次の値を書く

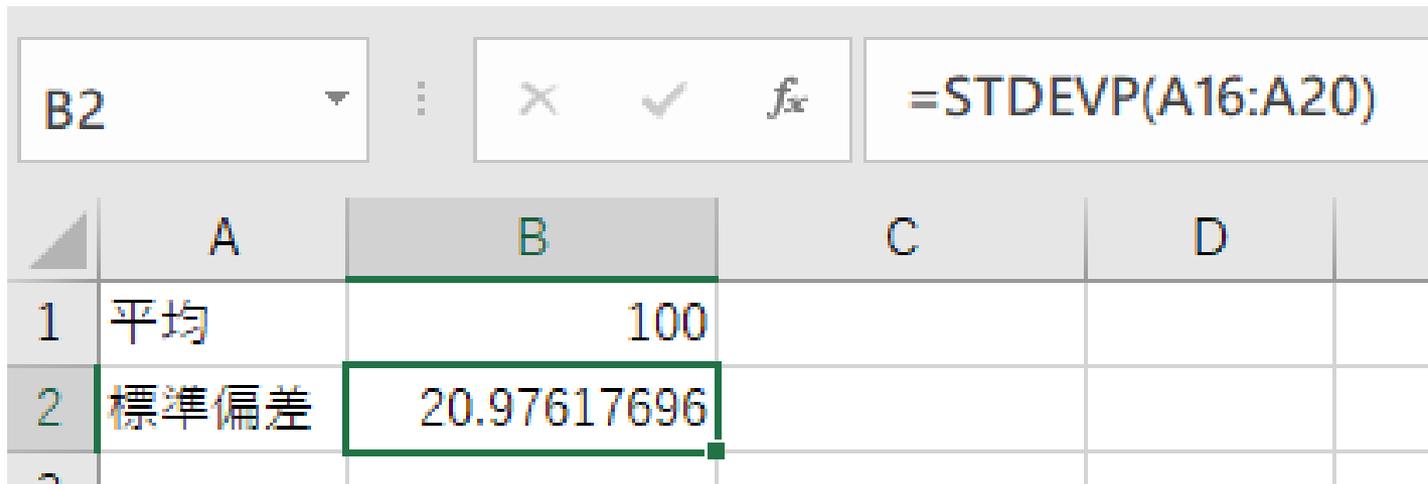
13	45	1.26982E-08	0!
14	50	1.56709E-12	
15			
16	80		
17	110		
18	120		
19	70		
20	120		
21			

※ 数値はすべて半角

- B1 と B2 を書き替える

B1 に式「**=AVERAGE(A16:A20)**」 **平均**

B2 に式「**=STDEVP(A16:A20)**」 **標準偏差**



The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D
1	平均	100		
2	標準偏差	20.97617696		

The formula bar at the top shows the formula `=STDEVP(A16:A20)` for cell B2. The spreadsheet has columns A, B, C, and D, and rows 1 and 2. Cell B1 contains the value 100, and cell B2 contains the value 20.97617696. The cells B1 and B2 are highlighted with a green border.

※ 数値はすべて半角

- A4 から A14を，次のように書き替える

4	80	0.01
5	85	0.01
6	90	0.01
7	95	0.01
8	100	0.01
9	105	0.01
10	110	0.01
11	115	0.01
12	120	0.01
13	125	0.00
14	130	0.00
15		

※ 数値はすべて半角

D 列を使って，確率を読み取る．

D 列は「**以上になる確率**」を求めている

4	80	0.012071942	0.170177871	0.829822
5	85	0.014727958	0.237274572	0.762725
6	90	0.016975872	0.316776738	0.683223
7	95	0.018486122	0.405798755	0.594201
8	100	0.019018827	0.5	0.5
9	105	0.018486122	0.594201245	0.405799
10	110	0.016975872	0.683223262	0.316777
11	115	0.014727958	0.762725428	0.237275
12	120	0.012071942	0.829822129	0.170178
13	125	0.009348371	0.883335699	0.116664
14	130	0.006839414	0.92366931	0.076331
15				

- 売上が **105 以上** になる**確率**は？
0.405799
(列の幅によって，表示が変化する)

C列を使って、確率を読み取る。

C列は「以下になる確率」を求めている

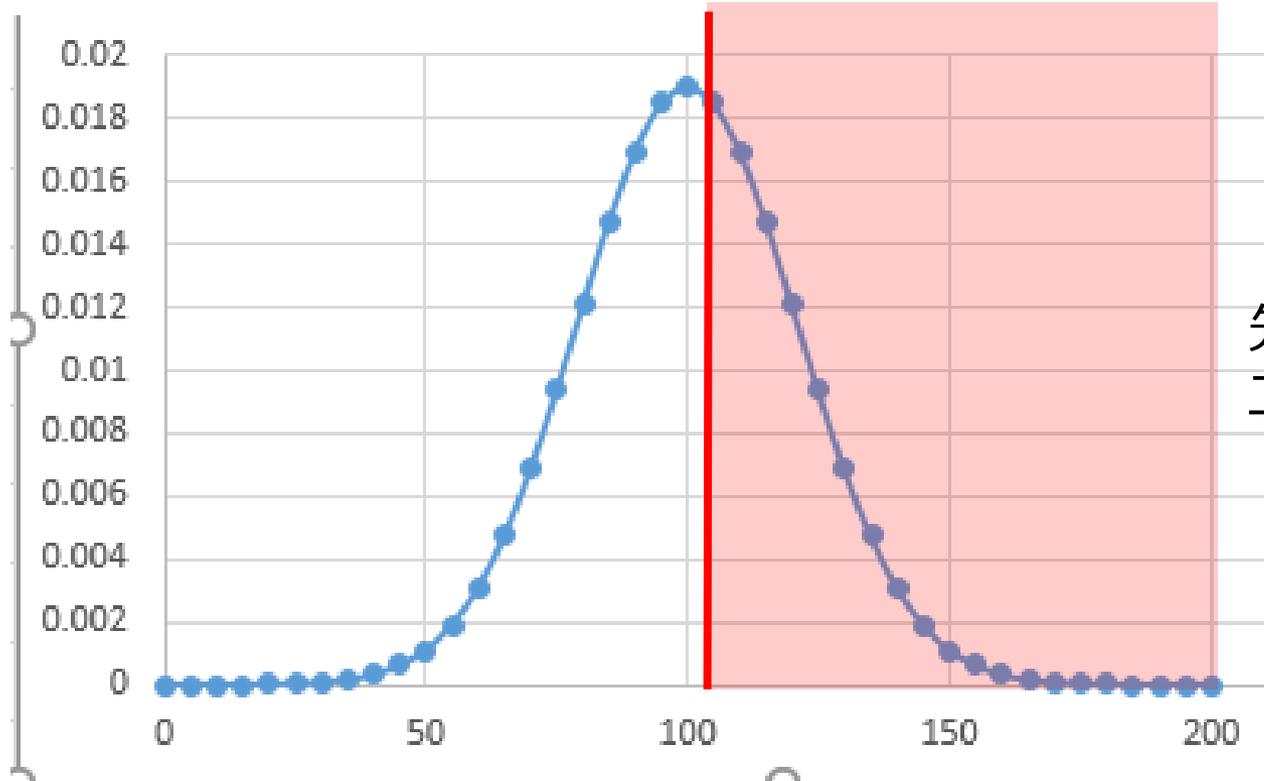
4	80	0.012071942	0.170177871	0.829822
5	85	0.014727958	0.237274572	0.762725
6	90	0.016975872	0.316776738	0.683223
7	95	0.018486122	0.405798755	0.594201
8	100	0.019018827	0.5	0.5
9	105	0.018486122	0.594201245	0.405799
10	110	0.016975872	0.683223262	0.316777
11	115	0.014727958	0.762725428	0.237275
12	120	0.012071942	0.829822129	0.170178
13	125	0.009348371	0.883335699	0.116664
14	130	0.006839414	0.92366931	0.076331
15				

■ 売上が **105 以下** になる**確率**は？

0.594201245

(列の幅によって、
表示が変化する)

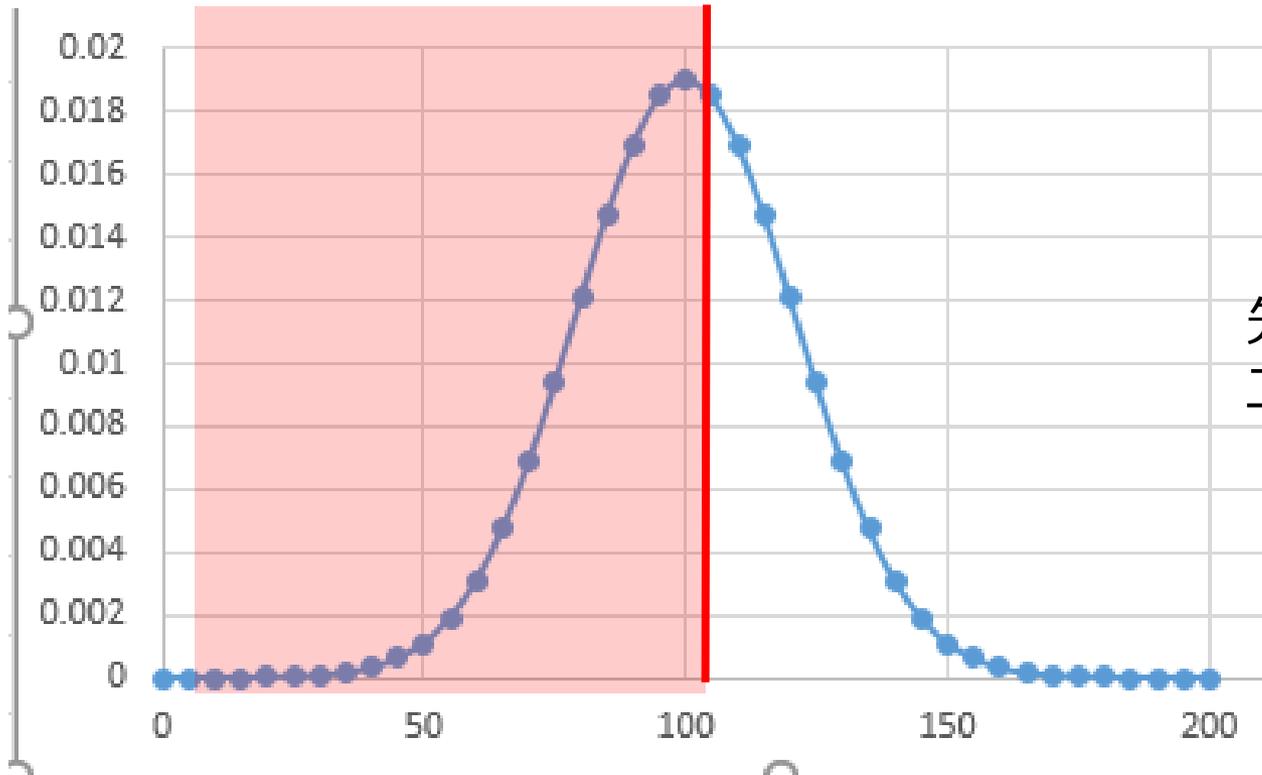
「以上」のイメージ



先ほどの
エクセルファイルの D列

105

「以下」のイメージ



先ほどの
エクセルファイルの C列

105